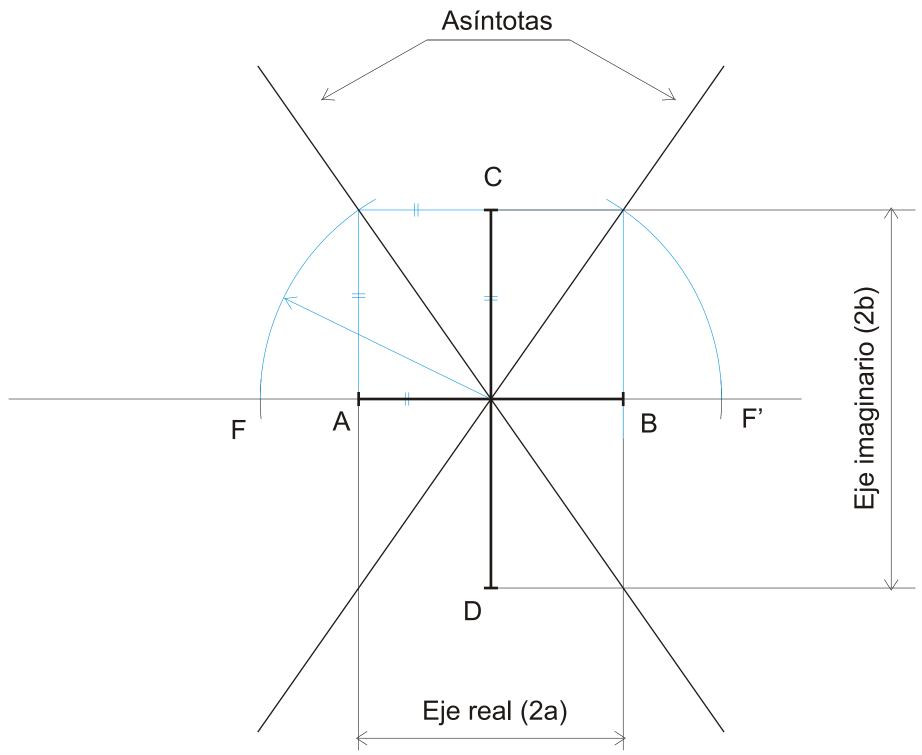
LA HIPÉRBOLA. DEFINICIONES Y TRAZADOS BÁSICOS

La hipérbola es una curva plana, abierta y doble, que se produce como resultado de la intersección entre una superficie cónica de revolución y un plano paralelo a dos de sus generatrices.

Definición: La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante e igual a un segmento llamado eje real.

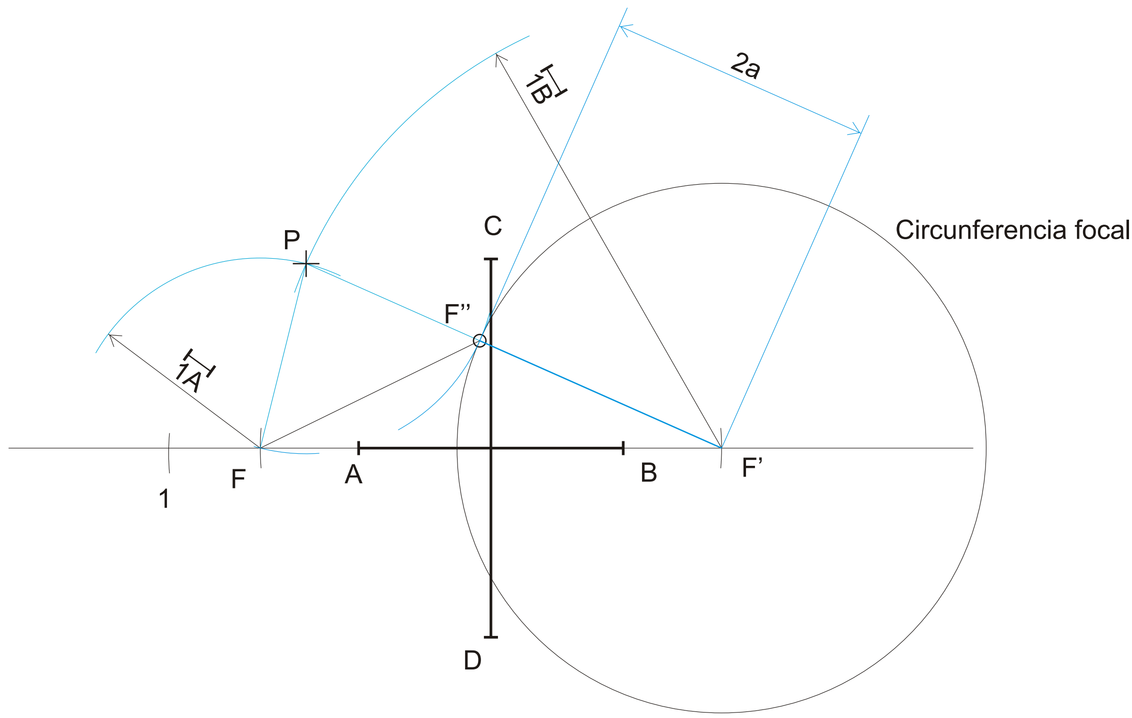


Los extremos del eje real son los puntos A y B. Los focos F y F' están contenidos en la misma recta. Además del eje real, la hipérbola tiene un eje imaginario CD, perpendicular al primero por su punto medio y contenido en una recta que es el eje de simetría de las dos ramas de la curva.

Las asíntotas son dos rectas que pasan por el centro de la hipérbola (el punto de corte de los ejes), y son tangentes a la misma en puntos impropios.

Dados los ejes real e imaginario, para dibujar las asíntotas y hallar los focos basta con trazar rectas paralelas a los ejes desde sus extremos. Uniendo los puntos de intersección de las mismas con el centro obtenemos las asíntotas, y llevando la distancia desde el centro a dichos puntos de intersección sobre el eje real obtenemos los focos.

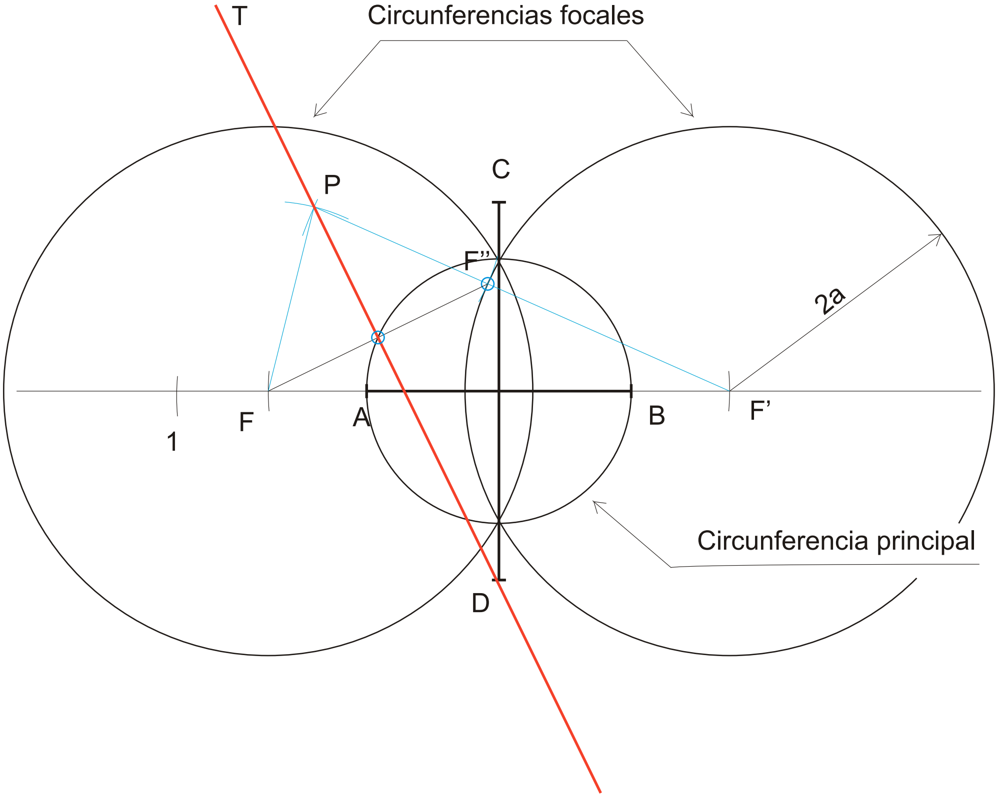
La excentricidad en la hipérbola, c/a, es siempre mayor que 1.



Para obtener puntos de la hipérbola basándonos en su definición, tomamos aleatoriamente otros puntos auxiliares 1, 2…sobre la recta que contiene al eje real, fuera de la distancia focal. Tomamos las medidas desde ese punto a los extremos de dicho eje, A y B, y con esas distancias trazamos arcos de centros F y F' respectivamente. Los puntos de intersección de dichos arcos son puntos de la hipérbola.

LA HIPÉRBOLA. DEFINICIONES Y TRAZADOS BÁSICOS

TRAZADO DE LAS RECTAS TANGENTES A LA HIPÉRBOLA DESDE UN PUNTO P DE LA MISMA.



Definimos las circunferencias focales y la circunferencia principal como en las demás curvas cónicas.

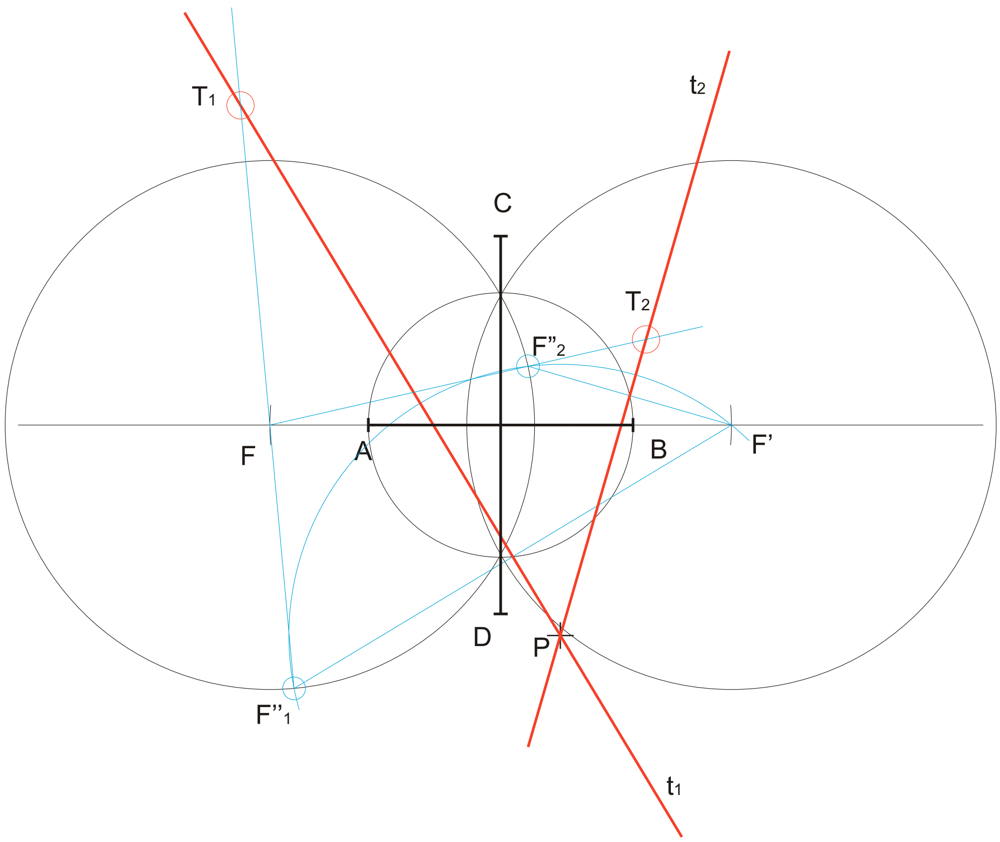
La circunferencia focal es el lugar geométrico de los puntos simétricos de los focos respecto de las tangentes. Comprobamos que el punto F'' se produce por abatimiento de F sobre el radio vector de P, está contenido en la circunferencia focal de foco F' y es simétrico de F respecto de la tangente por P, que por tanto es la mediatriz del segmento F-F' o la bisectriz del ángulo que pasa por estos dos puntos y cuyo vértice es P.

Podemos comprobar también como el pie de la perpendicular a la tangente dibujada, punto medio del segmento F-F', está contenido en la circunferencia principal, de acuerdo con su definición.

LA HIPÉRBOLA. DEFINICIONES Y TRAZADOS BÁSICOS

TRAZADO DE LAS RECTAS TANGENTES A LA HIPÉRBOLA DESDE UN PUNTO EXTERIOR P.

UTILIZANDO LA CIRCUNFERENCIA FOCAL.



Desde un punto exterior P se pueden dibujar dos rectas tangentes a una hipérbola.

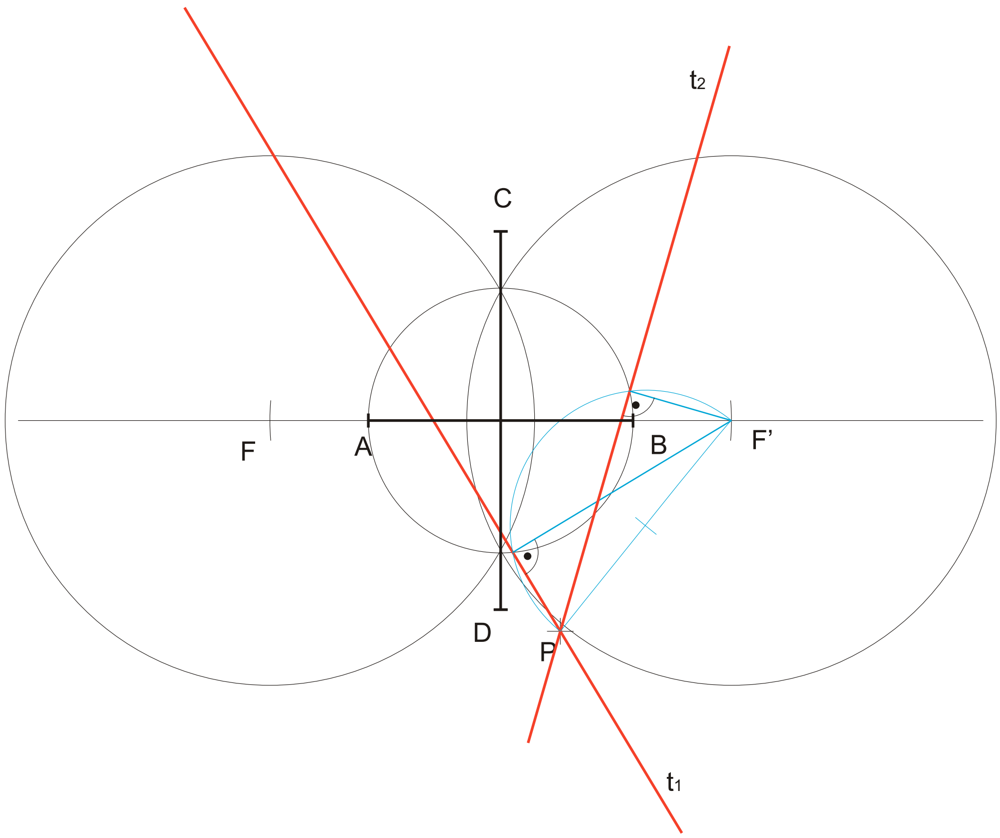
Para este trazado basta dibujar un arco de centro P y radio PF o PF', y buscar sus puntos de intersección con la circunferencia focal de centro el que no se ha utilizado tomar el radio de dicho arco.

Cada punto de intersección hallado, F''_1 y F''_2, unido con el foco opuesto, produce un segmento cuya mediatriz es una de las tangentes buscadas.

Para hallar los puntos de tangencia unimos cada uno de los puntos F'' con el centro de su propia circunferencia focal y prolongamos la recta hasta cortar a la tangente. El punto de intersección entre ambas rectas es el de tangencia con la hipérbola.

TRAZADO DE LAS RECTAS TANGENTES A LA HIPÉRBOLA DESDE UN PUNTO EXTERIOR P.

UTILIZANDO LA CIRCUNFERENCIA PRINCIPAL.

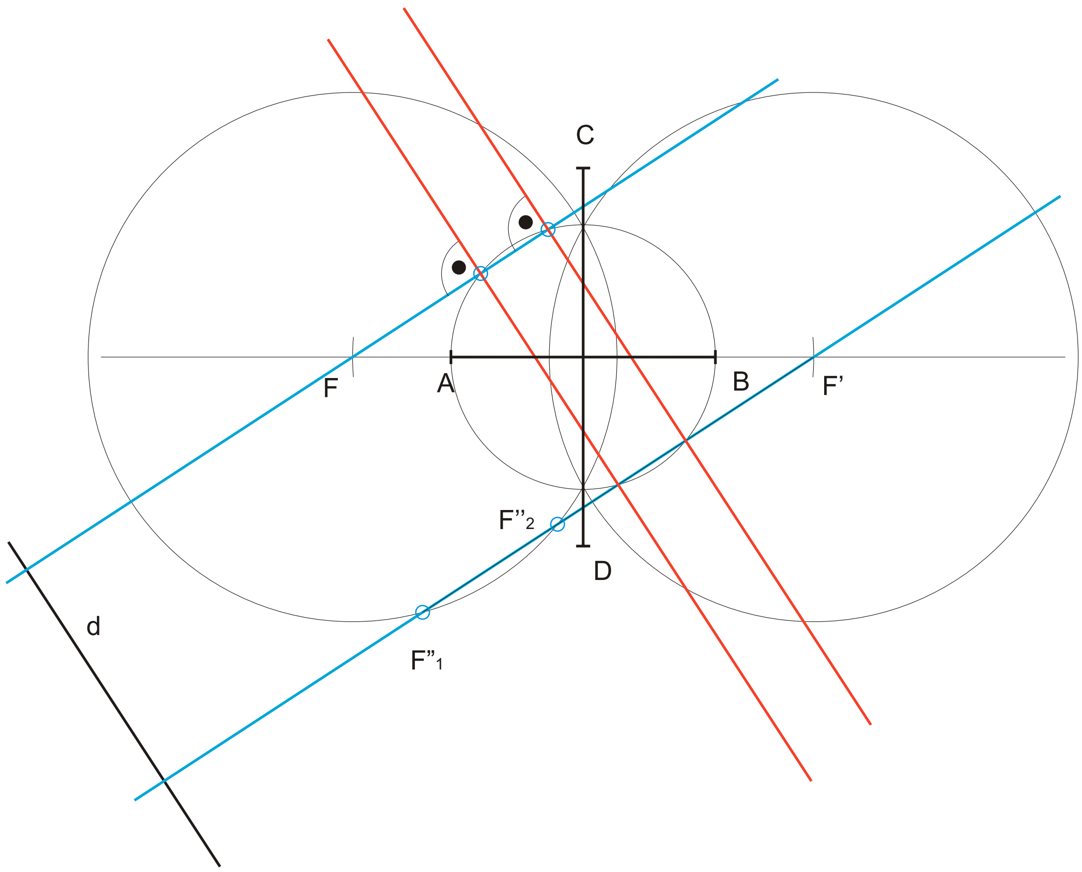


Apoyándonos en la definición de circunferencia principal, lo que buscamos es un punto que mire a P y a uno de los focos bajo un ángulo de 90°, siendo cada lado de dicho ángulo la tangente y el segmento que une el foco con su simétrico. Así pues, dibujamos el arco capaz de 90° del segmento PF o PF'. Los puntos de intersección de dicho trazado con la circunferencia principal pertenecerán a las tangentes buscadas, por lo que se unen con P. El resultado es el mismo cualquiera que sea el foco elegido.

Para hallar los puntos de tangencia deberemos encontrar lo simétricos de los focos en cada circunferencia focal, del modo explicado en el apartado anterior.

LA HIPÉRBOLA. DEFINICIONES Y TRAZADOS BÁSICOS

TRAZADO DE RECTAS TANGENTES A LA HIPÉRBOLA PARALELAS A UNA DIRECCIÓN CONOCIDA.



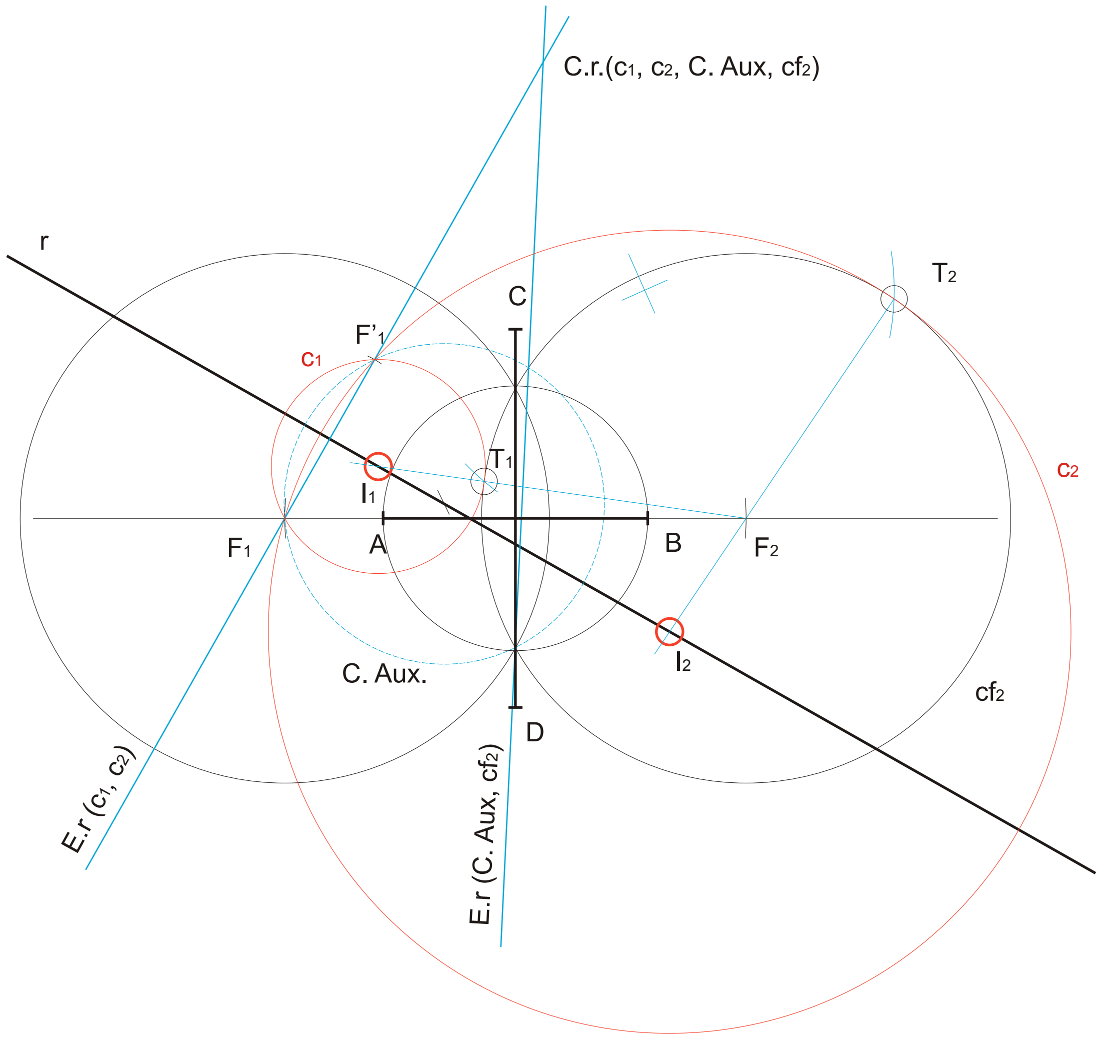
La dirección viene dada por la recta d. Como en las otras curvas cónicas, debemos trazar perpendiculares a dicha dirección desde uno de los focos. Donde dichas perpendiculares corten a la circunferencia focal de centro del otro foco, obtenemos el simétrico del primero, F'', que junto con este determina un segmento cuya mediatriz es la tangente buscada.

La perpendicular por el foco a la dirección dada corta en dos puntos a la circunferencia focal de centro el otro foco. Por lo tanto existen dos tangentes. Si dicha perpendicular no es secante sino tangente a la circunferencia focal, sólo existe una tangente posible, precisamente una de las asíntotas de la hipérbola.

También podemos trazar las tangentes paralelas a d utilizando la circunferencia principal. Para ello basta prolongar las perpendiculares a la dirección dada hasta que corten a dicha circunferencia, y desde los puntos de intersección dibujar directamente las rectas buscadas, paralelas a d.

Los puntos de tangencia se hallan, como siempre, uniendo cada punto F'' con el centro de su propia circunferencia focal, y prolongando la recta hasta que corte a la tangente.

PUNTOS DE INTERSECCIÓN ENTRE LA HIPÉRBOLA Y UNA RECTA r DADA.



Como en las otras curvas cónicas, para resolver este trazado utilizamos la segunda definición estudiada: la hipérbola es también el lugar geométrico de los puntos del plano que son centros de circunferencias que, pasando por uno de los focos, son tangentes a la circunferencia focal de centro el otro foco (circunferencias c_1 y c_2 marcadas en rojo).

Por tanto, de nuevo reducimos el problema a uno de los casos de Apolonio estudiados: circunferencias tangentes a otra dada (focal), que pasan por un punto dado (foco, centro de la otra circunferencia focal) y cuyos centros están contenidos en una recta dada (r).

Procedemos como en el caso estudiado en el apartado de tangencias, hallando el simétrico de F respecto de la recta r, trazando al eje radical que determinan ambos puntos, y el que determinan la circunferencia focal de centro el otro foco y una auxiliar que corta a esta y pasa por los dos puntos primeros. Los dos ejes radicales se cortan en un punto, centro radical cuya raíz cuadrada de la potencia respecto de alguna de las circunferencias dibujadas nos permite hallar los puntos de tangencia T_1 y T_2 que, unidos con el centro de la circunferencia focal dibujada nos permiten hallar los centros de las circunferencias marcadas en rojo, centros que pertenecen a la recta r y a la hipérbola, luego son los de intersección buscados entre ambas figuras.